Γ′ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ορισμοί των εννοιών και θεωρήματα χωρίς απόδειξη

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Πως ορίζεται το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών;

Το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:

• Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι, ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο R, με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

• Υπάρχει ένα στοιχείο ***i*** τέτοιο ώστε $\boldsymbol{i^2=-1}$.

• Κάθε στοιχείο z του C γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in$R.

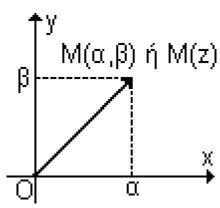
Σημείωση: Αν $z=\alpha+\beta i$, το ***α*** λέγεται **πραγματικό μέρος** του *z* και συμβολίζεται με *Re(z)*, δηλαδή ***Re(z)=α*** και το ***β*** λέγεται **φανταστικό μέρος** του *z* και συμβολίζεται με *Im(z)*, δηλαδή ***Im(z)=β***.

2. Πότε δύο μιγαδικοί αριθμοί *α+βi* και *γ+δi* είναι ίσοι και πότε ένας μιγαδικός ισούται με μηδέν;

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$. Δηλαδή ισχύει: $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$. Επομένως, επειδή $0=0+0i$, έχουμε: $\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$.

3. Τι είναι εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού και τι είναι το μιγαδικό επίπεδο;

Κάθε μιγαδικό αριθμό *α+βi* μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε στο σημείο *M(α,β)* ενός καρτεσιανού επιπέδου. Αλλά και αντιστρόφως, κάθε σημείο *M(α,β)* του καρτεσιανού επιπέδου μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στο μιγαδικό *α+βi*. Το σημείο M λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού *α+βi*. Αν θέσουμε *z=α+βi*, τότε το σημείο *M(α,β)* μπορούμε να το συμβολίσουμε και με M(z).



Ένα καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα αναφέρεται ως **μιγαδικό επίπεδο**. Ο άξονας x’x λέγεται **πραγματικός άξονας**, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία *M(α,0)* που είναι εικόνες των πραγματικών *α=α+0i*, ενώ ο άξονας y’y λέγεται **φανταστικός άξονας**, αφού σε αυτόν ανήκουν τα σημεία *M(0,β)* που είναι εικόνες των φανταστικών *βi=0+βi*.

Ένας μιγαδικός *z=α+βi* παριστάνεται επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα $\vec{OM}$, του σημείου *M(α,β)*.

4. Τι λέγεται συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού;

Αν $z=\alpha+\beta i$ τότε ο μιγαδικός $\alpha-\beta i$ λέγεται συζυγής του z και συμβολίζεται με $\bar{z}$

Δηλαδή είναι $\bar{z}=\overline{\alpha+\beta i}=\alpha-\beta i$

5. Πως ορίζεται η δύναμη μιγαδικού;

- Ορίζουμε: $z^1=z$, $z^2=z\cdot z,\ldots,$ και γενικά $z^\nu=z^{\nu-1}\cdot z$, για κάθε ακέραιο ν, με $\nu>1$.
- Αν $z\neq 0$, ορίζουμε $z^0=1,\quad z^{-\nu}=\dfrac{1}{z^\nu}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.
- Ισχύει : $\boldsymbol{i^0=1,\quad i^1=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=i^2 i=-i}$.
- Γενικά αν $\nu=4\rho+\upsilon$, όπου ρ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, τότε:

$$i^\nu=i^{4\rho+\upsilon}=i^{4\rho}i^\upsilon=(i^4)^\rho i^\upsilon=1^\rho i^\upsilon=i^\upsilon=\begin{cases}1 \ , & \alpha\nu\quad \upsilon=0\\ i \ , & \alpha\nu\quad \upsilon=1\\ -1 \ , & \alpha\nu\quad \upsilon=2\\ -i \ , & \alpha\nu\quad \upsilon=3\end{cases}$$

6. Ποιες είναι οι ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών;

1. $z+\bar{z}=2\alpha$ **2.** $z-\bar{z}=2\alpha$ **3.** $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ **4.** $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$

5. $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ **6.** $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$. **7.** $\overline{(z^\nu)}=(\bar{z})^\nu$

7. Πως ορίζεται το μέτρο μιγαδικού;

Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο Oxy. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του M από την αρχή των αξόνων O, δηλαδή: $|z|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

8. Ποιες είναι οι ιδιότητες του μέτρου;

1. $|z|=|\bar{z}|=|-z|$ **2.** $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ **3.** $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ **4.** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

5. $\big|\,|z_1|-|z_2|\,\big|\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ (τριγωνική ανισότητα) **6.** $(M_1M_2)=|z_1-z_2|$, όπου M_1, M_2 οι εικόνες των z_1, z_2, δηλαδή :το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

9. Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι εξισώσεις: |z–z$_o$|=ρ, ρ>0 και |z–z$_1$|=|z–z$_2$|;

Η εξίσωση $|z-z_0|=\rho,\quad \rho>0$ παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ,

ενώ η εξίσωση $|z-z_1|=|z-z_2|$, τη **μεσοκάθετο** του τμήματος με άκρα τα $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

Σημείωση: Η εξίσωση $|z-z_1|+|z-z_2|=2\alpha$ με α>0 και $|z_1-z_2|<2\alpha$ παριστάνει έλλειψη με εστίες τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$ μεγάλο άξονα ίσο με 2α. Αν $|z_1-z_2|=2\alpha$ παριστάνει το ευθύγραμμο τμήμα AB, ενώ αν $|z_1-z_2|>2\alpha$ είναι κενό σύνολο. Η εξίσωση $\big||z-z_1|-|z-z_2|\big|=2\alpha$, α>0 παριστάνει υπερβολή με εστίες τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

10. Τι ονομάζουμε συνάρτηση;

Έστω Α ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α** μια διαδικασία *f* , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό *y*. Το *y* ονομάζεται **τιμή της *f* στο *x*** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(x)}$.

11. Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης;

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της *f* σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της *f* και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(A)}$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y \mid y = f(x)$ για κάποιο $x \in A\}$.

12. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης;

Έστω *f* συνάρτηση με πεδίο ορισμού *Α* και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της *f* και συμβολίζεται με $\boldsymbol{C_f}$.

13. Πότε δυο συναρτήσεις λέγονται ίσες;

Δύο συναρτήσεις *f* και *g* λέγονται **ίσες** όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού *Α* και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

14. Πως ορίζονται οι πράξεις μεταξύ συναρτήσεων;

Ορίζουμε ως άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο, αντίστοιχα, δύο συναρτήσεων *f*, *g* τις συναρτήσεις με τύπους:

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και $\mathrm{f} \cdot \mathrm{g}$ είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού *Α* και *Β* των συναρτήσεων *f* και *g* αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\dfrac{f}{g}$ είναι το σύνολο $\{x \mid x \in A$ και $x \in B$, με $g(x) \neq 0\}$.

15. Τι ονομάζουμε σύνθεση συναρτήσεων;

Αν *f*, *g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού *Α*, *Β* αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της *f* με την *g***, και τη συμβολίζουμε με $\boldsymbol{gof}$, τη συνάρτηση με τύπο: $(gof)(x) = g(f(x))$.

Το πεδίο ορισμού της $\boldsymbol{gof}$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της *f* για τα οποία το *f(x)* ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο $\mathrm{A}_1 = \left\{x \in A \,/\, f(x) \in B\right\}$

16. Τι λέγεται γνησίως αύξουσα και τι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση;

Μια συνάρτηση *f* λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα *διάστημα* *Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$
- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα *διάστημα* *Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

17. Πότε μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο και πότε ελάχιστο;

Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού *A* θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο, εφόσον υπάρχουν, λέγονται **ολικά ακρότατα** της *f*.

18. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1–1 (ένα προς ένα);

- Μια συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται **συνάρτηση 1–1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \ne x_2$, τότε $f(x_1) \ne f(x_2)$.
- **Ισοδύναμος ορισμός:** Μια συνάρτηση $f : A \to R$ είναι **συνάρτηση 1–1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει : αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

Σχόλια: 1. Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση μιας 1–1 συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο της.

2. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι συνάρτηση 1–1.

Το αντίστροφο **ΔΕΝ** ισχύει, δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι 1–1 τότε **δεν** είναι απαραίτητα γνησίως μονότονη.

3. Για κάθε στοιχείο του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

19. Τι ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση και τι σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων;

Έστω μια $1-1$ συνάρτηση $f : A \to R$. Τότε για κάθε στοιχείο *y* του συνόλου τιμών, $f(A)$, της *f* υπάρχει μοναδικό στοιχείο *x* του πεδίου ορισμού της *A* για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : A \to R$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Η *g* λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1}. Επομένως έχουμε $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

Από τον ορισμό προκύπτουν οι σχέσεις: $f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x,\ x\in A$ και $f\left(f^{-1}\left(y\right)\right)=y,\ y\in f\left(A\right)$

Οι γραφικές παραστάσεις C και C’ των συναρτήσεων ***f*** και ***f***$^{-1}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x’Oy’.

ΟΡΙΑ

20. Ποιες είναι οι άμεσες συνέπειες του ορισμού του ορίου;

(α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$ **(β)** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

21. Πως συνδέεται το όριο με τα πλευρικά όρια;

Αν μια συνάρτηση *f* είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$$

22. Ποιες ανισότητες ισχύουν στα όρια; (όριο και διάταξη)

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$, κοντά στο x_0
- Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

23. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ορίων αν το x τείνει στο x$_o$;

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων *f* και *g* στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ **2.** $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x))=\kappa\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε $\kappa\in R$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ **4.** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$

5. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$ **6.** $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, όταν $f(x)\ge 0$ κοντά στο x_0.

7. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\nu}=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\nu}$, $\nu\in N^*$

24. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$,

τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

25. Ποια είναι τα βασικά τριγωνομετρικά όρια;

α) $\lim\limits_{x\to x_o}\eta\mu x=\eta\mu x_o$ **β)** $\lim\limits_{x\to x_o}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_o$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

26. Πως υπολογίζουμε το όριο σύνθετης συνάρτησης;

Για να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε $u = g(x)$ και υπολογίζουμε το $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ και το $\ell = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$ (αν υπάρχουν) . Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

27. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ορίων αν το x τείνει στο ±∞;

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$, ενώ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0}(-f(x)) = -\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0}(-f(x)) = +\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$ και αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, ενώ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
- δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \dfrac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Όριο αθροίσματος και γινομένου

Το όριο της f είναι:	$\alpha \in R$	$\alpha \in R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

Το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\nu = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$

28. Πότε η *f* λέγεται συνεχής στο x_o;

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

29. Πότε η *f* λέγεται συνεχής στο πεδίο ορισμού της;

- Όταν η f είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της . Ειδικότερα :

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β).

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον : $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$

30. Τι γνωρίζετε για τις πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων;

- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$f+g$, $c\cdot f$, όπου $c\in R$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[\nu]{f}$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

Σχόλια: α. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση *P* είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_o \in R$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_o} P(x) = P(x_o)$

β. Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής, αφού για κάθε x_o του πεδίου ορισμού της ισχύει

$\lim\limits_{x\to x_o} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_o)}{Q(x_o)}$

γ. Οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς, αφού για κάθε $x_o \in R$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_o} \eta\mu x = \eta\mu x_o$

και $\lim\limits_{x\to x_o} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_o$

δ. Οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x$ και $g(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$ είναι συνεχείς .

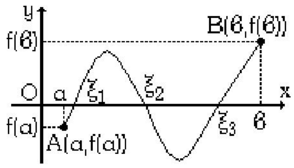
ε. Αν μια συνάρτηση *f* είναι συνεχής στο x_o και η συνάρτηση *g* είναι συνεχής στο $f(x_o)$, τότε η σύνθεση τους *gof* είναι συνεχής στο x_o.

31. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

Έστω μια συνάρτηση *f* , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η *f* είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

32. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano.

Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα *[α,β]* , τότε τα σημεία *A(α,f(α))* και *B(β,f(β))* βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x'x. Έτσι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Σχόλια: 1. Αν μια συνάρτηση *f* είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$, ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή η *f* διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ.

2. Για να προσδιορίσουμε το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης *f* σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της *f* χωρίζουν το πεδίο ορισμού της ακολουθούμε τα εξής βήματα:

α. Βρίσκουμε τις ρίζες της *f*. (Λύνουμε την εξίσωση *f(x)=0*)

β. Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της *f* στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της *f* στο αντίστοιχο διάστημα.

33. Πως σχετίζεται η συνέχεια με τα διαστήματα;

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος *Δ* μέσω μιας συνεχούς και **μη** σταθερής συνάρτησης *f* είναι διάστημα.

34. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης τιμής.

Αν *f* είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η *f* παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή *M* και μια ελάχιστη τιμή *m*. Δηλαδή υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε αν $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$, να ισχύει **$m\le f(x)\le M$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$**

35. Ποιο είναι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε διάστημα;

- Αν μια συνάρτηση *f* είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου
- $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.
- Αν, όμως, η *f* είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A)
- Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και όταν μια συνάρτηση *f* είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$ και $(\alpha,\beta]$.

•

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

36. Πότε μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη στο x_o και τι ονομάζουμε παράγωγο της *f* στο x_o;

Μια συνάρτηση *f* λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της *f* στο** x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

37. Πως ορίζεται η εφαπτομένη στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ της C_f;

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ο πραγματικός αριθμός $f'(x_0)$, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ= f΄(x₀)*.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Σχόλιο: Τον συντελεστή διεύθυνσης $\lambda= f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τον ονομάζουμε και **κλίση της C_f στο Α** ή *κλίση της f στο* x_o.

38. Πότε μια συνάρτηση *f* λέγεται παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της;

• Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο *A*. Θα λέμε ότι:

— Η *f* είναι παραγωγίσιμη στο *A* ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0\in A$.

— Η *f* είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** (α,β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$.

— Η *f* είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in R \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in R.$$

39. Τι είναι η παράγωγος συνάρτηση;

Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού *A* και A_1 το σύνολο των σημείων του *A* στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f' : A_1\to R$, ωστε : $x \to f'(x)$ η οποία ονομάζεται **παράγωγος της *f***.

40. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x;

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του *y* ως προς το *x* στο σημείο** x_o την παράγωγο $f'(x_0)$

41. Πως παραγωγίζεται μια σύνθετη συνάρτηση και ποιος είναι ο κανόνας αλυσίδας;

Αν η συνάρτηση *g* είναι παραγωγίσιμη στο x_o και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_o)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει $(f \circ g)'(x_o) = f'(g(x_o)) \cdot g'(x_o)$.

Γενικά, αν μια συνάρτηση *g* είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και η *f* είναι παραγωγίσιμη στο *g(Δ)*, τότε η συνάρτηση *fog* είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x\right)\right) \cdot g'\left(x\right)$.

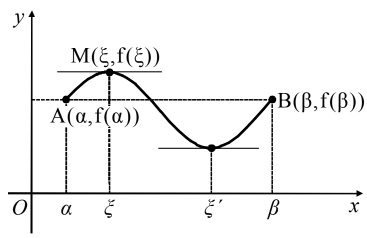
Δηλαδή, αν *u=g(x)*, τότε: $\left(f\left(u\right)\right)' = f'\left(u\right) \cdot u'$.

Με τον συμβολισμό του Leibniz, αν *y=f(u)* και *u=g(x)*, έχουμε τον τύπο $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ που είναι γνωστός ως κανόνας αλυσίδας.

42. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

43. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Rolle.



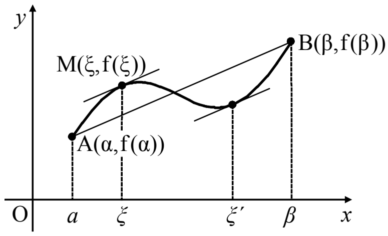
Το Θεώρημα Rolle γεωμετρικά, σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των *x*.

44. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Αν μια συνάρτηση f είναι: συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

45. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Γεωμετρικά, το ΘΜΤ σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της *f* στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας *AB*.



46. Τι ονομάζουμε τοπικό μέγιστο και τι τοπικό ελάχιστο της *f* ;

- Μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της *f*.

- Μία συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \ge f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της *f*.

47. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat.

Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του *Δ*. Αν η *f* παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$.

48. Ποια σημεία μιας συνάρτησης *f* λέγονται κρίσιμα σ' ένα διάστημα Δ;

Κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ λέγονται τα **εσωτερικά** σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

49. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης *f*;

Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η παράγωγος της *f* μηδενίζεται.

Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η *f* δεν παραγωγίζεται.

Τα άκρα του *Δ* (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η *f* δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της *f* στο διάστημα *Δ*.

50. Τι γνωρίζετε για την παράγωγο συνάρτησης στο σημείο που παρουσιάζει ακρότατο σε εσωτερικό σημείο διαστήματος Δ;

Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_0 εσωτερικό σημείο του *Δ*. Αν η *f* παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

51. Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται κυρτή και πότε κοίλη;

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Σχόλια: α. Αν η *f* είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ τότε η *f'* είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση ενώ, αν η *f* είναι κοίλη στο Δ τότε η *f'* είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

β. Αν μια συνάρτηση *f* είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται '' κάτω'' (αντιστοίχως ''πάνω'') από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής της.

52. Πως σχετίζεται η δεύτερη παράγωγος με την κυρτότητα;

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

- Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
- Αν $f''(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Σχόλιο: Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης (θεωρήματος) δεν ισχύει, δηλαδή αν η f είναι κυρτή ή κοίλη στο Δ, τότε δεν είναι απαραίτητα $f''(x)>0$ ή $f''(x)<0$ αντίστοιχα. Μπορεί να ισχύει $f''(x)\geq 0$ ή $f''(x)\leq 0$ αντίστοιχα.

53. Τι ονομάζουμε σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης;

Έστω μια συνάρτηση *f* παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η *f* είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της *f*.

54. Πως σχετίζεται η *f΄΄* με το σημείο καμπής;

- Αν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της *f* και η *f* είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0)=0$.

- Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0\in(\alpha,\beta)$. Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$, τότε το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

55. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της *f*;

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της *f*.

56. Τι ονομάζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της *f*;

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της *f* στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

57. Τι ονομάζουμε (πλάγια) ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της *f*;

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της *f* στο $+\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ και στο $-\infty$ αν $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

58. Πως προσδιορίζουμε την ασύμπτωτη (πλάγια ή οριζόντια) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης *f*;

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης *f* στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda \in R \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \beta \in R, \text{ αντιστοίχως } \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda \in R \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \beta \in R$$

Σχόλια στις ασύμπτωτες: α. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του δύο (2) δεν έχουν ασύμπτωτες.

β. Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή *P(x)* μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

γ. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

- Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η *f* **δεν** ορίζεται.
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η *f* **δεν** είναι συνεχής.
- Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,\ +\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,\ \alpha)$.

59. Ποιοι είναι οι κανόνες De l΄ Hospital;

• Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathrm{R} \cup \{-\infty,\ +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

• Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in \mathbb{R}\cup\{-\infty,\ +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Σχόλια: α. Οι παραπάνω κανόνες ισχύουν και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.

β. Οι παραπάνω κανόνες ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τους εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

60. Τι ονομάζουμε Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της *f* στο Δ;

Έστω *f* μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της *f* στο *Δ*** ονομάζεται κάθε συνάρτηση *F* που είναι παραγωγίσιμη στο *Δ* και ισχύει

$$F'(x)=f(x),\ \text{για κάθε}\ \ x\in \Delta.$$

61. Τι ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο *[α,β]* ;

Αν η f είναι **συνεχής** στο [α,β] τότε ορίζουμε : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$.

Επίσης ορίζουμε : $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx=-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ και $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0$

62. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος;

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu\in$R. Τότε ισχύουν

1. $\int_{\alpha}^{\beta}\lambda f(x)dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ **2.** $\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)+g(x)]dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

3. $\int_{\alpha}^{\beta}[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx+\mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

4. Αν η *f* είναι συνεχής σε διάστημα *Δ* και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx+\int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

5. Έστω *f* μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση *f* δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$.

63. Τι γνωρίζετε για τη συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$;

Αν *f* είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα *Δ* και *α* είναι ένα σημείο του *Δ*, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x\in\Delta$, είναι μια παράγουσα της *f* στο *Δ*. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'=f(x),\quad \text{για κάθε}\quad x\in\Delta.$$

64. Ποιος είναι ο τύπος της Ολοκλήρωσης κατά παράγοντες στα ορισμένα ολοκληρώματα;

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$$

65. Ποιος είναι ο τύπος της Ολοκλήρωσης με αντικατάσταση στα ορισμένα ολοκληρώματα;

Ισχύει : $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

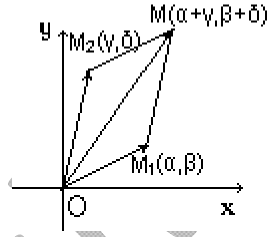
66. Πως ορίζεται το εμβαδόν *Ε(Ω)* ενός χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες *x=α* , *x= β* και τις γραφικές παραστάσεις των *f* και *g*;

Ισχύει : $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$

Θεωρήματα με αποδείξεις

1. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών *α+βi* και *γ+δi* είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

Απόδειξη

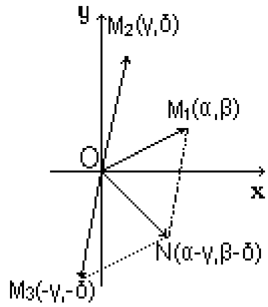


Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο τότε το άθροισμα:

$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$ παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha+\gamma,\ \beta+\delta)$ Επομένως $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$.

2. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών *α+βi* και *γ+δi* είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Απόδειξη



Η διαφορά $(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)$ παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha-\gamma,\ \beta-\delta)$. Επομένως $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$

3. Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$.

Απόδειξη

Έχουμε: $(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)=\alpha(\gamma+\delta i)+\beta i(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+(\beta i)\cdot(\delta i)=$

$=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$

4. Να εκφράσετε το πηλίκο $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i\neq 0$, στη μορφή $\kappa+\lambda i$.

Απάντηση

Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με τον συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Δηλαδή $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$

5. Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε: $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

Απόδειξη

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)}=\overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=\bar{z}_1+\bar{z}_2 .$$

6. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $z\in C$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$, $\alpha\neq 0$ και $\Delta<0$.

Απάντηση

Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο R και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετράγωνου, στη μορφή $\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$, όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης.

Επειδή $\frac{\Delta}{4\alpha^2}=\frac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2}=\frac{i^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2}{(2\alpha)^2}=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$ η εξίσωση γράφεται: $\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$. Άρα οι λύσεις της είναι: $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$ οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί.

Σημείωση: Και στην δευτεροβάθμια εξίσωση με άγνωστο μιγαδικό αριθμό και συντελεστές πραγματικούς ισχύουν οι τύποι του Vieta, δηλαδή $z_1+z_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ και $z_1\cdot z_2=\frac{\gamma}{\alpha}$

7. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε: $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

Απόδειξη

Πράγματι, έχουμε: $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\Leftrightarrow|z_1\cdot z_2|^2=|z_1|^2\cdot|z_2|^2$

$$\Leftrightarrow(z_1\cdot z_2)(\overline{z_1\cdot z_2})=z_1\cdot\bar{z}_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_2 \quad \Leftrightarrow z_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=z_1\cdot\bar{z}_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_2$$

και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

8. Δείξτε ότι : $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

Απόδειξη

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in R$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu)+\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0=P(x_0) .$$

9. Δείξτε ότι : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0)\neq 0$.

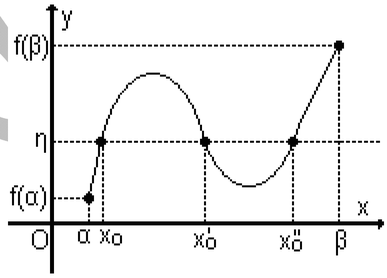
Απόδειξη

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του *x* και $x_o \in R$ με $Q(x_0)\neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

10. Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα *[α,β]*. Αν η *f* είναι συνεχής στο *[α,β]* και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ δείξτε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f(x_o)=\eta$.

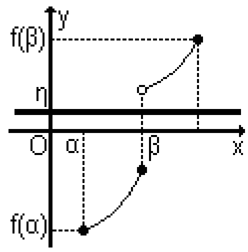
Απόδειξη



Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η *g* είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.



Σχόλιο

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

11. Αν η *f* είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής σ' αυτό.

Απόδειξη

Για $x\neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$,

Οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$,

αφού η *f* είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Άρα, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η *f* είναι συνεχής στο x_0.

Προσοχή!!!

1. Το αντίστροφο **δεν** ισχύει πάντα, δηλαδή: Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής, τότε δεν είναι απαραίτητα και παραγωγίσιμη.

2. Αν μια συνάρτηση **δεν** είναι συνεχής τότε **δεν** είναι και παραγωγίσιμη, γιατί αν ήταν παραγωγίσιμη τότε θα ήταν και συνεχής.

12. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$, $c\in R$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή (c)΄=0.

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{c-c}{x-x_0}=0$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

13. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή *(x)΄=1*.

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$. Επομένως,

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

14. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in R-\{0,\ 1\}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\dfrac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

15. Έστω $f(x)=\sqrt{x}$. Δείξτε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

16. Αν οι συναρτήσεις *f, g* είναι παραγωγίσιμες στο x_o, τότε η συνάρτηση *f+g* είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Απόδειξη

Για $x\neq x_0$, ισχύει: $$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή : $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

17. Αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες τότε ισχύει:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x)+f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x)+f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$$

Απόδειξη

Είναι: $\left(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\right)'=\left[\left(f(x)\cdot g(x)\right)\cdot h(x)\right]'=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'\cdot h(x)+\left(f(x)\cdot g(x)\right)\cdot h'(x)=$

$\left[f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\right]\cdot h(x)+f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)=f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x)+f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x)+f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$

18. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη στο R* και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$.

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x\in R^*$ έχουμε: $(x^{-\nu})'=\left(\dfrac{1}{x^\nu}\right)'=\dfrac{(1)'x^\nu-1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2}=\dfrac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}$.

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό $\nu > 1$. Επομένως, αν $\kappa \in N - \{0,\ 1\}$, τότε: $\boldsymbol{(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}}$.

19. Έστω η συνάρτηση *f(x)=εφx*. Η συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη στο $D_f = R - \{x / \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή : $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Απόδειξη

$$(\text{εφ}x)' = \left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)' = \frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x - \text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}x\text{συν}x + \text{ημ}x\text{ημ}x}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = \frac{1}{\text{συν}^2 x}.$$

20. Η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in R - Z$ είναι παραγωγίσιμη στο *(0,+∞)* και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Απόδειξη

Πράγματι, αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

21. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, *α*>0 είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha$, δηλαδή : $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$.

Απόδειξη

Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u = x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x\ln\alpha} \cdot \ln\alpha = \alpha^x \ln\alpha.$$

22. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R* και ισχύει $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

Απόδειξη

Πράγματι: αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, ενώ αν $x < 0$, τότε :

$\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$.

Επομένως, $y' = (\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$ και άρα $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

23. Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. Αν η *f* είναι συνεχής στο *Δ* και *f'(x)=0* για κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η *f* είναι σταθερή σε όλο το διάστημα *Δ*.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η *f* ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1). Επειδή το *ξ* είναι εσωτερικό σημείο του *Δ*, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

24. Έστω δυο συναρτήσεις *f, g* ορισμένες σε ένα διάστημα *Δ*. Αν οι *f,g* είναι συνεχείς στο *Δ* και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*, τότε υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε για κάθε *x*∈*Δ* να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά *C* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.

25. Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα *Δ*.

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η *f* είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.

Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η *f* είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το *Δ*.

Απόδειξη

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η *f* ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

• Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

Σχόλιο: Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν** ισχύει. Δηλαδή αν η *f* είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα στο *Δ*, η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική ή αρνητική αντίστοιχα στο εσωτερικό του *Δ*. (Μπορεί να ισχύει *f'(x)≥0* ή *f'(x)≤0*)

26. (Θεώρημα Fermat) Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_o εσωτερικό σημείο του *Δ*. Αν η *f* παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η *f* παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του *Δ* και η *f* παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq \Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η *f* είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Επομένως,

• αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \qquad (2)$$

• αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$.(3) Έτσι , από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

27. Έστω μια συνάρτηση *f* παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα *(α,β)*, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο η *f* είναι συνεχής.

i. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_o) και $f'(x)<0$ στο (x_o,β), τότε το *f(x)*

ii. Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_o) και $f'(x)>0$ στο (x_o,β), τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό ελάχιστο της *f*.

iii. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$, τότε το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η *f* είναι γνησίως μονότονη στο *(α,β)*.

Απόδειξη

i. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_o)$ και η *f* είναι συνεχής στο x_o, η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_o]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_o)$ (1), για κάθε $x\in(\alpha,x_o]$.

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_o,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_o, η *f* είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_o,\beta)$.

Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_o)$ (2), για κάθε $x\in[x_o,\beta)$.

Επομένως λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_o)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_o)$ είναι μέγιστο της *f* στο *(α,β)* και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii. Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii. Έστω ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$.

Επειδή η *f* είναι συνεχής στο x_o θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_o]$ και $[x_o,\beta)$. Επομένως για $x_1<x_o<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_o)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της *f*.

Θα δείξουμε, τώρα ότι η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο *(α,β)*. Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

- Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_o]$, επειδή η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_o]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
- Αν $x_1,x_2\in[x_o,\beta)$, επειδή η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_o,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
- Τέλος αν $x_1<x_o<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_o)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο *(α,β)*.

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$.

28. Έστω *f* μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. Αν *F* είναι μια παράγουσα της *f* στο *Δ*, τότε: α) όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, c∈R, είναι παράγουσες της *f* στο *Δ* και β) κάθε άλλη παράγουσα *G* της *f* στο *Δ* παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, c∈R.

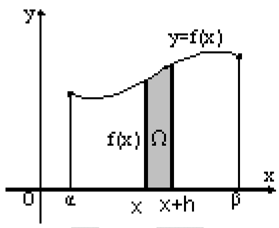
Απόδειξη

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in$R, είναι μια παράγουσα της *f* στο *Δ*, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.
- Έστω *G* είναι μια άλλη παράγουσα της *f* στο *Δ*. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Άρα υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

29. Αν *f* είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα *Δ* και *α* είναι ένα σημείο του *Δ*, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x\in\Delta$, είναι μια παράγουσα της *f* στο *Δ*.

Δηλαδή ισχύει: $\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.



Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής:

$F(x+h)-F(x)=\int_{x}^{x+h} f(t)dt$ = Εμβαδόν του χωρίου Ω. $\approx f(x)\cdot h$, για μικρά $h>0$. Άρα, για μικρά $h>0$ είναι $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx f(x)$,οπότε

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

30. Έστω *f* μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [*α,β*]. Αν *G* είναι μια παράγουσα της *f* στο [α,β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της *f* στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η *G* είναι μια παράγουσα της *f* στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in$ R τέτοιο, ώστε : $G(x)=F(x)+c$ (1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$,

οπότε, για $x=\beta$, έχουμε $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$

και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

Κανόνες παραγώγισης

$\left(f(x)\pm g(x)\right)' = f'(x)\pm g'(x)$	
$\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x)$	$\left(\text{f}(\text{x})\cdot \text{g}(\text{x})\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
$\left(\dfrac{\text{f}(\text{x})}{\text{g}(\text{x})}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$	
$\left(g\circ f\right)'(x) = g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$	

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων	Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων
$(c)'=0$	
$(x)'=1$	
$\left(x^{\nu}\right)' = \nu x^{\nu-1},\ \nu\in\mathbb{N}^*$	$\left(\left[f(x)\right]^{\nu}\right)' = \nu\left[f(x)\right]^{\nu-1}\cdot f'(x)$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε x>0	$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}},\ \text{f}(\text{x})>0$
$\left(\dfrac{1}{\text{x}}\right)' = -\dfrac{1}{\text{x}^2}$ με $\text{x}\neq 0$	$\left(\dfrac{1}{\text{f}(\text{x})}\right)' = -\dfrac{1}{\text{f}^2(\text{x})}\cdot \text{f}'(\text{x})$ με $\text{f}(\text{x})\neq 0$
$(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$	$\left(\eta\mu \text{f}(\text{x})\right)' = \sigma\upsilon\nu \text{f}(\text{x})\cdot \text{f}'(\text{x})$
$(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$	$\left(\sigma\upsilon\nu \text{f}(\text{x})\right)' = -\eta\mu \text{f}(\text{x})\cdot \text{f}'(\text{x})$
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x},\ x>0$	$\left(\ln(f(x)\right)' = \dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x),\ f(x)>0$
$\left(\ln\|x\|\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln\|f(x)\|\right)' = \dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$
$\left(\varepsilon\varphi \text{x}\right)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \text{x}} = 1+\varepsilon\varphi^2 \text{x}$	$\left(\varepsilon\varphi \text{f}(\text{x})\right)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \text{f}(\text{x})}\cdot \text{f}'(\text{x})$
$\left(\sigma\varphi \text{x}\right)' = \dfrac{-1}{\eta\mu^2 \text{x}} = -1-\sigma\varphi^2 \text{x}$	$\left(\sigma\varphi \text{f}(\text{x})\right)' = \dfrac{-1}{\eta\mu^2 \text{f}(\text{x})}\cdot \text{f}'(\text{x})$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$\left(\alpha^{\text{x}}\right)' = \alpha^{\text{x}}\cdot \ln\alpha$, α >0	$\left(\alpha^{\text{f}(\text{x})}\right)' = \alpha^{\text{f}(\text{x})}\cdot \ln\alpha\cdot \text{f}'(\text{x})$, α >0
$\left(\text{x}^{\tau}\right)' = \tau\cdot \text{x}^{\tau-1}$, $\tau\in\mathbb{R}$, x>0	$\left(\left[\text{f}(\text{x})\right]^{\tau}\right)' = \tau\left[\text{f}(\text{x})\right]^{\tau-1}\cdot \text{f}'(\text{x}),\ \text{f}(\text{x})>0$

Πίνακας αρχικών συναρτήσεων

Συνάρτηση f	**Μια αρχική της f**
$f(x)=0$	$F(x)=c$, c σταθερά
$f(x)=1$	$F(x)=x$
$f(x)=x^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$	$F(x)=\frac{1}{\nu+1}\cdot x^{\nu+1}$
$f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $x>0$	$F(x)=\frac{1}{\alpha+1}\cdot x^{\alpha+1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$, $x<0$ ή $x>0$	$F(x)=\ln(x)$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$F(x)=\eta\mu x$
$f(x)=\eta\mu x$	$F(x)=-\sigma\upsilon\nu x$
$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$F(x)=\varepsilon\phi x$
$f(x)=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$F(x)=-\sigma\phi x$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$
$f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$	$F(x)=\frac{1}{\ln\alpha}\cdot\alpha^x$