

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = x$ και $\hat{\Gamma} = x + 30^\circ$.

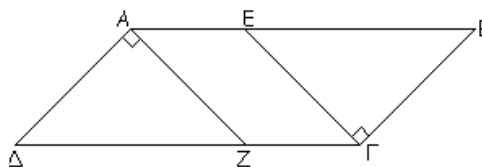
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.

β) Αν $AZ \perp AD$ και $GE \perp GB$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $DZ = BE$.

ii. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AEGZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

iii. Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AEGZ$.



2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 12\text{cm}$. Στις πλευρές AB , $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και E τέτοια ώστε $B\Delta = \frac{1}{4}AB$ και $\Gamma E = \frac{1}{4}A\Gamma$. Να υπολογίσετε το τμήμα ΔE .

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και τα ύψη του AD και BE . Αν το M είναι μέσο της πλευράς AB , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔME είναι ισοσκελές.

ii. Αν Z , H είναι τα μέσα των $M\Delta$ και ME αντίστοιχα και επιπλέον ισχύει $M\Delta = 6\text{cm}$ και $ZH = 2\text{cm}$, να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.

iii. Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $ABDE$ είναι εγγράψιμο.

4. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και K το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν E , Z , H και Θ είναι τα μέσα των τμημάτων KA , KB , $K\Gamma$ και $K\Delta$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, το ύψος του AD και η διάμεσός του AM . Προεκτείνουμε το AD κατά τμήμα $\Delta E = AD$ και το AM κατά τμήμα $MZ = AM$.

α) Να δειχθεί ότι $AB = BE$.

β) Να δειχθεί ότι $AB = \Gamma Z$.

γ) Να δειχθεί ότι το τετράπλευρο $B\Gamma ZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ) Αν $EZ = 4\text{cm}$, να υπολογίσετε το τμήμα ΔM .

6. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AE . Στην προέκταση της $B\Gamma$ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$.

α) Να δειχθεί ότι $AE=\frac{A\Delta}{2}$.

β) Αν $\Gamma Z\perp A\Delta$, να δειχθεί ότι $\Gamma Z=\frac{AB}{2}$.

γ) Αν η πλευρά του τριγώνου είναι 4cm και $E\text{H}\perp A\Delta$, να υπολογίσετε το τμήμα $E\text{H}$.

7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB<A\Gamma$ και η διχοτόμός του $A\Delta$. Αν $\Delta E\perp AB$ και $\Delta Z\perp A\Gamma$, να δείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\Delta E Z$ είναι ισοσκελές.

β) $A\Delta\perp Z E$.

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $B\Delta=AB$ και $\Gamma E=A\Gamma$. Αν $A M$ είναι η διάμεσος του $AB\Gamma$ τότε:

α) Να δειχθεί ότι $A M=\frac{E\Delta}{4}$.

β) Αν η $A M$ τέμνει την $E\Delta$ στο K , να δειχθεί ότι το K είναι μέσο της $E\Delta$.

9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στις προεκτάσεις των πλευρών του $B\Gamma$ και $A\Gamma$, προς το μέρος του Γ , παίρνουμε τμήματα $\Gamma\Delta=\frac{B\Gamma}{2}$ και $\Gamma E=\frac{A\Gamma}{2}$ αντίστοιχα.

α) Να δειχθεί ότι το τετράπλευρο $A B E \Delta$ είναι τραπέζιο.

β) Αν K, Λ είναι τα μέσα των $B\Delta$ και $A E$ αντίστοιχα, να δειχθεί ότι $K\Lambda=\frac{A B}{4}$.

10. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Αν Z και E είναι τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι διπλάσια από την περίμετρο του τριγώνου $\Delta E Z$.

11. Δίνεται ορθογώνιο $A B \Gamma \Delta$ με $B\Gamma=x$ και $A\Gamma=2x$. Στην προέκταση της $A\Gamma$, προς το μέρος του Γ , παίρνουμε τμήμα $\Gamma E=B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Gamma E$.

β) Αν η ευθεία $\Delta\Gamma$ τέμνει το τμήμα $B E$ στο σημείο Z , να δείξετε ότι $\Gamma Z=Z E=\frac{B Z}{2}$.

12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Εκτός του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ και έστω E το σημείο τομής των ευθειών $A\Gamma$ και $B\Delta$.

α) Να δείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.

β) Να δείξετε ότι το σημείο A είναι μέσο του $E\Gamma$.

γ) Αν η διάμεσος AM του $AB\Gamma$ ισούται με 4, να υπολογίσετε τα τμήματα $B\Delta$ και AB .

13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και τα ύψη του AD και BE . Αν το M είναι μέσο της πλευράς AB , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔME είναι ισοσκελές.

β) Αν Z, H είναι τα μέσα των $M\Delta$ και ME αντίστοιχα και επιπλέον ισχύει $M\Delta = 6\text{cm}$ και $ZH = 2\text{cm}$, να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.

14. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Στην προέκταση της AB , προς το μέρος του B , παίρνουμε τμήμα $B\Delta = B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Gamma\Delta$.

β) Αν $BE \perp \Gamma\Delta$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

γ) Να δείξετε ότι $\Gamma B \perp AE$.

15. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών του $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔE , προς το μέρος του E , παίρνουμε τμήμα $E\text{H} = AB$.

α) Να δειχθεί ότι το τρίγωνο $HA\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Να δειχθεί ότι $HB = \frac{B\Gamma}{2}$.

γ) Αν M είναι το σημείο τομής της AH με την $B\Gamma$, να δείξετε ότι $MB = \frac{B\Gamma}{4}$.