ΒΑΣΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σύνολα

- $\mathbb{N}$: **οι φυσικοί αριθμοί** $0,1,2,3,\ldots$
- $\mathbb{Z}$: **οι ακέραιοι αριθμοί** $\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$
- $\mathbb{Q}$: **οι ρητοί αριθμοί.** Είναι όλοι οι αριθμοί που μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ όπου α και β ακέραιοι και $\beta \neq 0$
- $\mathbb{Q}'$ ή $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$: **οι άρρητοι αριθμοί**. Είναι οι αριθμοί που αν γραφούν ως δεκαδικοί έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων που δεν είναι περιοδικά. (Όλοι οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί)
- $\mathbb{R}$: **οι πραγματικοί αριθμοί**. Είναι οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί μαζί.

Πράξεις - Ιδιότητες

Πρόσθεση

- $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ Αντιμεταθετική
- $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ Προσεταιριστική
- $\alpha+0=\alpha$ Ουδέτερο στοιχείο
- $\alpha+(-\alpha)=0$ Αντίθετο στοιχείο
- $\alpha+\beta=\alpha+\gamma \Leftrightarrow \beta=\gamma$ Ιδιότητα διαγραφής
- Αν $\alpha=\beta$ και $\gamma=\delta$ τότε $\alpha+\gamma=\beta+\delta$

Πολλαπλασιασμός

- $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ Αντιμεταθετική
- $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ Προσεταιριστική
- $\alpha\cdot 1=\alpha$ Ουδέτερο στοιχείο
- $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq 0$ Αντίθετο στοιχείο
- $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma \Leftrightarrow \beta=\gamma,\ \alpha\neq 0$ Ιδιότητα διαγραφής
- Αν $\alpha=\beta$ και $\gamma=\delta$ τότε $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\delta$
- $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ Επιμεριστική ως προς τη πρόσθεση
- $\alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma$ Επιμεριστική ως προς την αφαίρεση

Διαίρεση: • $\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta},\ \beta\neq 0$

Άλλες ιδιότητες

- $\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ **ή** $\beta=0$
- $\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ **και** $\beta\neq 0$
- $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ **και** $\beta=0$
- $(-1)\cdot\alpha=-\alpha$
- $(-\alpha)\cdot\beta=-\alpha\cdot\beta$
- $(-\alpha)\cdot(-\beta)=\alpha\cdot\beta$
- $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$

Πράξεις Κλασμάτων

- $\frac{\alpha}{\beta}\pm\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha\pm\gamma}{\beta},\ \beta\neq 0$
- $\frac{\alpha}{\beta}\pm\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\delta\pm\gamma\cdot\beta}{\beta\cdot\delta},\ \beta\cdot\delta\neq 0$
- $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta},\ \beta\cdot\delta\neq 0$
- $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma},\ \beta\cdot\gamma\cdot\delta\neq 0$

Ιδιότητες Αναλογιών

- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma,\ \beta\cdot\delta\neq 0$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha},\ \alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\neq 0$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta},\ \beta\cdot\delta\neq 0$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta},\ \beta\cdot\delta\neq 0$

Δυνάμεις

Ορισμοί

- $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$, $\nu\in\mathbb{N}$, $\nu>1$
- $\alpha^1=\alpha$
- $\alpha^0=1,\ \alpha\neq 0$
- $\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^\nu},\ \alpha\neq 0$

Ιδιότητες

- $\alpha^\nu\cdot\alpha^\mu=\alpha^{\nu+\mu}$
- $\alpha^\nu:\alpha^\mu=\alpha^{\nu-\mu},\ \alpha\neq 0$
- $\left(\alpha^\nu\right)^\mu=\alpha^{\nu\cdot\mu}$
- $\left(\alpha\cdot\beta\right)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu},\ \beta\neq 0$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu,\ \alpha\cdot\beta\neq 0$

Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

- $\left(\alpha+\beta\right)^2=\alpha^2+2\alpha\cdot\beta+\beta^2$
- $\left(\alpha-\beta\right)^2=\alpha^2-2\alpha\cdot\beta+\beta^2$
- $\left(\alpha-\beta\right)\cdot\left(\alpha+\beta\right)=\alpha^2-\beta^2$
- $\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\cdot\beta+2\alpha\cdot\gamma+2\beta\cdot\gamma$
- $\left(\alpha+\beta\right)^3=\alpha^3+3\alpha^2\cdot\beta+3\alpha\cdot\beta^2+\beta^3$
- $\left(\alpha-\beta\right)^3=\alpha^3-3\alpha^2\cdot\beta+3\alpha\cdot\beta^2-\beta^3$
- $\alpha^3+\beta^3=\left(\alpha+\beta\right)\cdot\left(\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta^2\right)$
- $\alpha^3-\beta^3=\left(\alpha-\beta\right)\cdot\left(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2\right)$
- $\left(x+\alpha\right)\cdot\left(x+\beta\right)=x^2+\left(\alpha+\beta\right)x+\alpha\cdot\beta$
- $\alpha^\nu-\beta^\nu=\left(\alpha-\beta\right)\cdot\left(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\cdot\beta+\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2+\cdots+\alpha\cdot\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}\right)$, $\nu\in\mathbb{N}$, $\nu>1$

Ανισότητες

- $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha\pm\gamma<\beta\pm\gamma$
- Αν $\alpha<\beta$ και $\beta<\gamma$, τότε $\alpha<\gamma$
- $\begin{cases}\alpha<\beta\\ \gamma<\delta\end{cases}\Rightarrow \alpha+\gamma<\beta+\delta$
- $\begin{cases}\alpha<\beta\\ \gamma<\delta\end{cases}\Rightarrow \alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\delta$ αν **α,β,γ,δ θετικοί**
- $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma$ αν $\gamma>0$
- $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$ αν $\gamma<0$
- $\alpha<\beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma}<\dfrac{\beta}{\gamma}$ αν $\gamma>0$
- $\alpha<\beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma}>\dfrac{\beta}{\gamma}$ αν $\gamma>0$
- Αν $\alpha\cdot\beta>0$, τότε $\alpha<\beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{1}{\beta}$
- Αν **α,β θετικοί**, τότε $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu<\beta^\nu$

ΠΡΟΣΟΧΗ!! Δεν αφαιρούμε και **δεν** διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.

Απόλυτη τιμή

Ορισμός: $|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \text{αν } \alpha\geq 0\\ -\alpha, & \text{αν } \alpha<0\end{cases}$

Ιδιότητες

- $|x|\geq 0$
- $|x|=|-x|$
- $|x^2|=|x|^2=x^2$
- $|x|\geq x$
- $|x|\geq -x$
- $-|x|\leq x\leq |x|$
- $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$
- $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$, με $\beta\neq 0$
- $\big||\alpha|-|\beta|\big|\leq|\alpha\pm\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$
- $|x|=\theta \Leftrightarrow x=-\theta$ ή $x=\theta$, αν $\theta\geq 0$
- $|x|=|\alpha| \Leftrightarrow x=-\alpha$ ή $x=\alpha$
- $|x|\leq\theta \Leftrightarrow -\theta\leq x\leq\theta$, αν $\theta\geq 0$
- $|x|\geq\theta \Leftrightarrow x\geq\theta$ ή $x\leq-\theta$, αν $\theta\geq 0$
- Αν $|\alpha|+|\beta|=0$, τότε $\alpha=0$ **και** $\beta=0$
- Αν $|\alpha|+|\beta|\neq 0$, τότε $\alpha\neq 0$ **ή** $\beta\neq 0$

Ρίζες

Ορισμός: $\sqrt[\nu]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^\nu = \alpha$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha \geq 0$, $x \geq 0$

- $\left(\sqrt[\nu]{x}\right)^\nu = x$, $x \geq 0$
- $\sqrt[2\nu]{x^{2\nu}} = |x|$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
- $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, $\alpha \geq 0$, $\mu \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
- $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$
- $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$
- $\alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$
- $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$, $\alpha \geq 0$
- $\sqrt[\nu \cdot \rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, $\alpha \geq 0$

Δευτεροβάθμια εξίσωση

- Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ λέγεται εξίσωση **δευτέρου βαθμού**.
- **Διακρίνουσα:** $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$
αν $\Delta > 0$	έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
αν $\Delta = 0$	έχει μία διπλή ρίζα την $x_0 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
αν $\Delta < 0$	δεν έχει πραγματικές ρίζες

Τύποι Vieta: Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, τότε:

- $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$
- $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

- Η εξίσωση με ρίζες x_1, x_2 είναι η εξής: $x^2 - Sx + P = 0$

Τριώνυμο

Ορισμός: Τριώνυμο δευτέρου βαθμού λέγεται η παράσταση , $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

Μορφές Τριωνύμου

$\Delta > 0$	$f(x) = \alpha \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, x_1, x_2 ρίζες του τριωνύμου
$\Delta = 0$	$f(x) = \alpha \cdot \left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
$\Delta < 0$	$f(x) = \alpha \cdot \left[\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \dfrac{\lvert\Delta\rvert}{4\alpha^2}\right]$

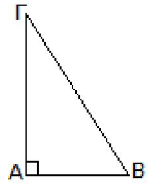
Πρόσημο τριωνύμου

$\Delta > 0$	**f(x) Ομόσημο του α** αν $x < x_1$ ή $x > x_2$ **f(x) Ετερόσημο του α** αν $x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$	**f(x) Ομόσημο του α** για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **εκτός** της τιμής $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	**f(x) Ομόσημο του α** για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου με $x_1 < x_2$

Τριγωνομετρία

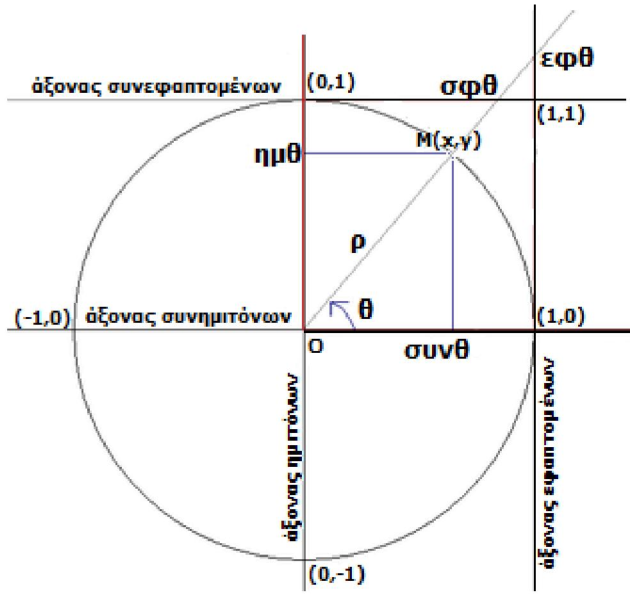
Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο



- $\eta\mu = \dfrac{\text{Απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{Υποτείνουσα}}$
- $\sigma\upsilon\nu = \dfrac{\text{Προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{Υποτείνουσα}}$
- $\varepsilon\varphi = \dfrac{\text{Απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{Προκείμενη κάθετη πλευρά}}$
- $\sigma\varphi = \dfrac{\text{Προκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{Απέναντι κάθετη πλευρά}}$

Τριγωνομετρικός κύκλος – Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε σύστημα συντεταγμένων

Ορισμός: Τριγωνομετρικός κύκλος λέγεται ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=1.



- $\rho = (OM) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\eta\mu\theta = \dfrac{y}{\rho}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{x}{\rho}$
- $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{y}{x}$
- $\sigma\varphi\theta = \dfrac{x}{y}$
- $-1 \le \eta\mu\theta \le 1$
- $-1 \le \sigma\upsilon\nu\theta \le 1$
- $\varepsilon\varphi\theta \in \mathbb{R}$
- $\sigma\varphi\theta \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{\mu}{180^\circ}$ (μετατροπή από rad (α) σε μοίρες (μ) και αντίστροφα)
- $\eta\mu(360^\circ\kappa + \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(360^\circ\kappa + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\varepsilon\varphi(360^\circ\kappa + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$
- $\sigma\varphi(360^\circ\kappa + \omega) = \sigma\varphi\omega$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$

Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

Τεταρτημόριο / Τριγ. αριθμός	1ο	2ο	3ο	4ο
ημ	+	+	–	–
συν	+	–	–	+
εφ	+	–	+	–
σφ	+	–	+	–

Τριγωνομετρικοί αριθμοί σημαντικών γωνιών

Μοίρες / rad / Τριγ. Αριθμός	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
συν	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
εφ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται	0	Δεν ορίζεται	0
σφ	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Δεν ορίζεται	0	Δεν ορίζεται

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

- $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$
- $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$, $\sigma\upsilon\nu\theta \ne 0$
- $\sigma\varphi\theta = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$, $\eta\mu\theta \ne 0$
- $\varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\varphi\theta = 1$

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

- $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \quad\text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \quad\text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta,\ \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

• Αντίθετες γωνίες

$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$

$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

$\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$

• Συμπληρωματικές γωνίες

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega$

$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\varphi\omega$

$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \varepsilon\varphi\omega$

• Γωνίες με διαφορά $\frac{\pi}{2}$

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\eta\mu\omega$

$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\sigma\varphi\omega$

$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\varepsilon\varphi\omega$

• Παραπληρωματικές γωνίες

$\eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$

$\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

$\varepsilon\varphi(\pi - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

$\sigma\varphi(\pi - \omega) = -\sigma\varphi\omega$

• Γωνίες με διαφορά π

$\eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$

$\sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

$\varepsilon\varphi(\pi + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$

$\sigma\varphi(\pi + \omega) = \sigma\varphi\omega$

• Γωνίες με άθροισμα $\frac{3\pi}{2}$

$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = -\eta\mu\omega$

$\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\varphi\omega$

$\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = \varepsilon\varphi\omega$

Πρόοδοι

Αριθμητική πρόοδος

• **Ορισμός:** Αριθμητική πρόοδος (Α.Π.) λέγεται η ακολουθία αριθμών που κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο **προσθέτοντας** τον ίδιο αριθμό ω (διαφορά).

• **Τύποι:** • $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$ (αναδρομικός τύπος) • $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ (γενικός τύπος)

• **Άθροισμα των ν πρώτων όρων:** $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right]$

• **Αριθμητικός μέσος:** Οι αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. αν και μόνο αν $2\beta = \alpha + \gamma$.

Γεωμετρική πρόοδος

• **Ορισμός:** Γεωμετρική πρόοδος (Γ.Π) λέγεται η ακολουθία αριθμών που κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο **πολλαπλασιάζοντας** τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό λ (λόγος).

• **Τύποι:** • $\alpha_{\nu+1} = \lambda \cdot \alpha_\nu$, $\lambda \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$ (αναδρομικός τύπος) • $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$ (γενικός τύπος)

• **Άθροισμα των ν πρώτων όρων:** $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, $\lambda \neq 1$

• **Άθροισμα άπειρων όρων:** Αν **$|\lambda| < 1$,** τότε $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \cdots = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda}$

• **Γεωμετρικός μέσος:** Οι μη μηδενικοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. αν και μόνο αν $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

Εκθετική συνάρτηση

• Εκθετική συνάρτηση με βάση α λέγεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με $0<\alpha\neq 1$. Ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και παίρνει τιμές στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Αν **0 < α < 1** η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ενώ **α > 1** η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

• Αν η βάση της συνάρτησης είναι ο αριθμός $e\simeq 2,718281...$ τότε η συνάρτηση $f(x)=e^x$ λέγεται εκθετική.

Ιδιότητες

Ισχύουν οι ιδιότητες των δυνάμεων και επιπλέον:

• $\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$ • Αν $\alpha>1$, τότε $\alpha^{x_1}>\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1>x_2$ • Αν $0<\alpha<1$, τότε $\alpha^{x_1}>\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1<x_2$

Λογαριθμική συνάρτηση

• **Ορισμός:** Αν $0<\alpha\neq 1$ και $\theta>0$, τότε $\log_\alpha\theta=x\Leftrightarrow\alpha^x=\theta$. (α: βάση λογαρίθμου)

• Λογαριθμική συνάρτηση με βάση α λέγεται η συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha x$ με $0<\alpha\neq 1$. Ορίζεται για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$.

Αν **0 < α < 1** η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ενώ **α > 1** η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.
(Σε όλα τα επόμενα θεωρούμε ότι οι μεταβλητές παίρνουν τιμές ώστε να ορίζονται οι λογάριθμοι)

• $\log_\alpha\alpha=1$ • $\log_\alpha 1=0$ • $\log_\alpha\alpha^x=x$ $\alpha^{\log_\alpha\theta}=\theta$

• **Δεκαδικός λογάριθμος:** $\log\theta=x\Leftrightarrow 10^x=\theta,\ \theta>0$

• **Νεπέριος ή φυσικός λογάριθμος:** $\ln\theta=x\Leftrightarrow e^x=\theta,\ \theta>0$

• Με βάση τα παραπάνω είναι: • $\log 10=1$ • $\log 1=0$ • $\log 10^x=x$ • $10^{\log\theta}=\theta$

• $\ln\theta=x\Leftrightarrow e^x=\theta$ • $\ln e=1$ • $\ln 1=0$ • $\ln e^x=x$ • $e^{\ln\theta}=\theta$

Ιδιότητες

• $\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_1$ • $\log_\alpha\dfrac{\theta_1}{\theta_2}=\log_\alpha\theta_1-\log_\alpha\theta_2$

• $\log_\alpha\theta^\kappa=\kappa\cdot\log_\alpha\theta$ • $\log_\alpha\theta=\dfrac{\log_\beta\theta}{\log_\beta\alpha}$ (αλλαγή βάσης)

Χρήσιμα: • $\alpha^x=e^{\ln\alpha^x}=e^{x\cdot\ln\alpha}$ (αλλαγή βάσης σε εκθετική συνάρτηση) • $\log x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$ • $\ln x=\dfrac{\log 10}{\log e}$

• $e^x=\alpha\Leftrightarrow x=\ln\alpha,\ \alpha>0$ • $\ln x=\alpha\Leftrightarrow x=e^\alpha$ • $\log_\alpha x_1=\log_\alpha x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$

• Αν $\alpha>1$, τότε $\log_\alpha x_1>\log_\alpha x_2\Leftrightarrow x_1>x_2$ • Αν $0<\alpha<1$, τότε $\log_\alpha x_1>\log_\alpha x_2\Leftrightarrow x_1<x_2$

Αναλυτική Γεωμετρία

• **Συντεταγμένες**: Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ τότε:

• $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ (μέσο του AB) • $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (μήκος του AB)

Ευθεία

• **Συντελεστής διεύθυνσης** ή **κλίση** ευθείας λέγεται η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον θετικό ημιάξονα Ox.

• Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία της ευθείας, ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ με $x_1\neq x_2$. Αν $x_1=x_2$, ο συντελεστής διεύθυνσης **δεν** ορίζεται.

Εξίσωση ευθείας

• Αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης και $A(x_0, y_0)$ σημείο της ευθείας, τότε έχει εξίσωση: $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$

• Αν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε έχει εξίσωση: $y = \lambda \cdot x$

• Αν διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι **κάθετη στον άξονα x'x** έχει εξίσωση $x = x_0$

• Αν διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι **κάθετη στον άξονα y'y** έχει εξίσωση $y = y_0$

• Η **διχοτόμος της 1ης - 3ης** γωνίας έχει εξίσωση $y = x$

• Η **διχοτόμος της 2ης - 4ης** γωνίας έχει εξίσωση $y = -x$

• **Συνθήκη παραλληλίας – καθετότητας:** Αν $(\varepsilon_1): y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2): y = \lambda_2 x + \beta_2$ οι εξισώσεις δύο ευθειών τότε: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

• Η $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$, $B \neq 0$

• Η **απόσταση** του σημείου $A(x_0, y_0)$ από την ευθεία (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι $d(A, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

• Το **εμβαδό** τριγώνου ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$

Κ ύ κ λ ο ς

Ορισμός: Κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ.

• Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ είναι $x^2 + y^2 = \rho^2$

• Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$

• Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

• Η **εφαπτομένη** του κύκλου (C): $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι η (ε): $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$

Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Αν (O, R) και (K, ρ) με $R > \rho$ δύο κύκλοι και $(OK) = \delta$ (διάκεντρος) τότε:

• Αν $\delta > R + \rho$ ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου (δεν έχουν κανένα κοινό σημείο)

• Αν $\delta < R - \rho$ ο (K, ρ) είναι εσωτερικός του (O, R) (δεν έχουν κανένα κοινό σημείο)

• Αν $\delta = R + \rho$ οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ένα κοινό σημείο επαφής)

• Αν $\delta = R - \rho$ οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά (ένα κοινό σημείο επαφής)

• Αν $R - \rho < \delta < R + \rho$ οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.

Π α ρ α β ο λ ή

Ορισμός: Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από μία σταθερή ευθεία δ (διευθετούσα) και από ένα σταθερό σημείο Ε (εστία).

• Η εξίσωση της παραβολής με $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ και δ: $x=-\frac{p}{2}$ είναι $y^2=2px$ (p: παράμετρος) και η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $yy_1=p(x+x_1)$

• Η εξίσωση της παραβολής με $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$ και δ: $y=-\frac{p}{2}$ είναι $x^2=2py$ (p: παράμετρος) και η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $xx_1=p(y+y_1)$

Έ λ λ ε ι ψ η

Ορισμός: Έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου Μ που το άθροισμα των αποστάσεων του από δύο σταθερά σημεία Ε, Ε′ (εστίες) είναι σταθερό και ίσο με 2α.

• Η εξίσωση της έλλειψης με $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$ είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ και η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$

• Η εξίσωση της έλλειψης με $E(0,\gamma)$ και $E'(0,-\gamma)$ είναι $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$, $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ και η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $\frac{xx_1}{\beta^2}+\frac{yy_1}{\alpha^2}=1$

Υ π ε ρ β ο λ ή

Ορισμός: Υπερβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου Μ που η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του από δύο σταθερά σημεία Ε, Ε′ (εστίες) είναι σταθερή και ίση με 2α.

• Η εξίσωση της υπερβολής με $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$ είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$. Η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $\frac{xx_1}{\beta^2}-\frac{yy_1}{\alpha^2}=1$

• Η εξίσωση της υπερβολής με $E(0,\gamma)$ και $E'(0,-\gamma)$ είναι $\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=1$, $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{\alpha}{\beta}x$ και $y=-\frac{\alpha}{\beta}x$. Η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $\frac{yy_1}{\beta^2}-\frac{xx_1}{\alpha^2}=1$

• **Ισοσκελής** λέγεται η υπερβολή με εξίσωση $x^2-y^2=\alpha^2$ ή $y^2-x^2=\alpha^2$

Επιπεδα σχήματα

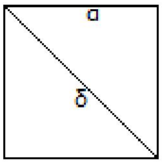
Τετράγωνο

α: πλευρά

Εμβαδόν=$α^2$

Περίμετρος=4α

Διαγώνιος: $δ = α\sqrt{2}$



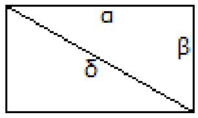
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

α,β: πλευρές

Εμβαδόν =α·β

Περίμετρος=2α+2β

Διαγώνιος: $δ = \sqrt{α^2 + β^2}$



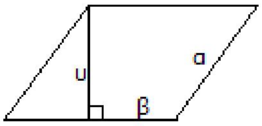
Παραλληλόγραμμο

α,β: πλευρές

υ: ύψος

Εμβαδόν = β·υ

Περίμετρος=2α+2β



Τραπέζιο

Β: μεγάλη βάση

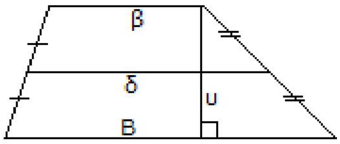
β: μικρή βάση

δ: διάμεσος

υ: ύψος

Εμβαδόν=$\frac{(Β + β) \cdot υ}{2}$

$δ = \frac{Β + β}{2}$



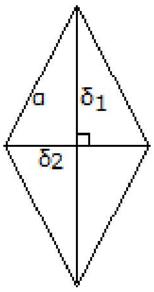
Ρόμβος

α: πλευρά

$δ_1$, $δ_2$: διαγώνιοι

Εμβαδόν=$\frac{δ_1 \cdot δ_2}{2}$

Περίμετρος=4α



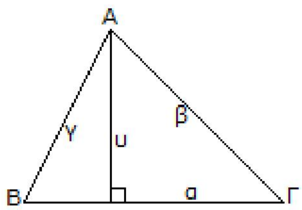
Τρίγωνο

α, β, γ: πλευρές

υ: ύψος στη πλευρά α

Περίμετρος: 2τ=α+β+γ

Εμβαδόν=$\frac{1}{2}β \cdot υ$



Κύκλος

ρ: ακτίνα

π≅3,14

Εμβαδόν= π·$ρ^2$

Μήκος κύκλου: L=2π·ρ