

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να επιλέξετε μια απάντηση για κάθε ερώτηση και να δικαιολογήσετε σύντομα την απάντησή σας.

i. Αν η εξωτερική γωνία ενός κανονικού n -γώνου ισούται με 30° , τότε το n ισούται με:

- A. 12 B. 10 Γ. 9 Δ. 8 Ε. 6

ii. Το εμβαδό τραπεζίου ισούται με 50 και το ύψος του με 10. Η διάμεσος του τραπεζίου ισούται με:

- A. 4 B. 5 Γ. 6 Δ. 10 Ε. δεν αρκούν τα στοιχεία αυτά

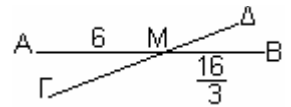
iii. Ο λόγος των εμβαδών ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς a και ενός τετράπλευρου με κάθετες διαγώνιες ίσες με a και $2a$ αντίστοιχα είναι:

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ Γ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Δ. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ Ε. $\frac{1}{2}$

iv. Αν AB είναι χορδή κύκλου (O,R) και P ένα εσωτερικό της σημείο τέτοιο ώστε $PA \cdot PB = 10$, τότε η $\Delta_{(O,R)}^P$ είναι:

- A. 2 B. 5 Γ. -5 Δ. -10 Ε. 10

v. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $M\Gamma = 2M\Delta$ και τα σημεία A, B, Γ και Δ είναι ομοκυκλικά, το $M\Delta$ ισούται με:



- A. 2 B. 3 Γ. 4 Δ. 5 Ε. $\frac{2}{3}$

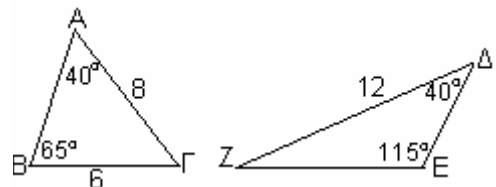
vi. Αν η περίμετρος ενός κανονικού n -γώνου είναι $P_n = 14$, η πλευρά του μπορεί να είναι ίση με:

- A. 7 B. 6 Γ. 4 Δ. 2 Ε. δεν αρκούν τα στοιχεία αυτά

vii. Αν το απόστημα κανονικού n -γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) ισούται με τα $\frac{3}{2}$ της πλευράς του, τότε η πλευρά του ισούται με:

- A. $\frac{R}{2}$ B. $\frac{R\sqrt{10}}{5}$ Γ. $\frac{R\sqrt{5}}{5}$ Δ. $\frac{R\sqrt{10}}{10}$ Ε. $\frac{R\sqrt{5}}{2}$

2. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το τμήμα EZ .



3. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2A\Delta$ και τα σημεία E, Z της $A\Delta$ τέτοια ώστε $AE = BZ = \frac{1}{4} AB$. Αν οι

ευθείες ΔE και ΓZ τέμνονται στο H , να δείξετε ότι:

α) $(HEZ) = (AE\Delta) + (BZ\Gamma)$.

β) Το εμβαδό του τριγώνου $AH\Delta$ είναι το μισό του εμβαδού τετραγώνου με πλευρά $B\Gamma$.

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $a=6\lambda$, $\beta=5\lambda$, $\gamma=4\lambda$ και περίμετρο $60m$.

i. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

ii. Αν $A\Delta$ είναι η προβολή της πλευράς AB πάνω στην πλευρά $A\Gamma$, να υπολογιστεί το τμήμα $A\Delta$.

iii. Να υπολογιστεί η διάμεσος μ_β του τριγώνου $AB\Gamma$.

iv. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

v. Να αποδειχθεί ότι $\frac{(AB\Gamma)}{(B\Gamma\Delta)} = \frac{10}{9}$.

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta=5cm$, $\gamma=3cm$ και $\hat{A}=60^\circ$.

α) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

β) Να υπολογίσετε την προβολή της διαμέσου μ_β πάνω στην πλευρά β .

γ) Να υπολογίσετε την διάμεσο μ_α .

δ) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς a πάνω στην πλευρά γ .

6. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει εμβαδό $\sqrt{3} cm^2$. Να υπολογίσετε το εμβαδό του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

7. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά $a=2cm$. Στην προέκταση της πλευράς $\Gamma\Delta$ προς τα σημεία Γ , Δ παίρνουμε τμήματα $\Gamma E=2cm$ και $\Delta Z=1cm$ αντίστοιχα. Αν οι ευθείες ZA και $E\beta$ τέμνονται στο σημείο Θ , τότε:

α) Να δείξετε ότι $\frac{(\Theta AB)}{(\Theta E)} = \frac{4}{25}$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $Z\Theta E$.

8. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά $a=2\sqrt{3} cm$. Στις προεκτάσεις της πλευράς $B\Gamma$ προς τα σημεία B , Γ παίρνουμε τα σημεία Δ , E αντίστοιχα τέτοια ώστε $B\Delta=\Gamma E=a/2$. Αν K , Λ είναι τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα και οι ευθείες ΔK , $E\Lambda$ τέμνονται στο M , να υπολογίσετε:

α) Τα τμήματα $K\Delta$ και ΛE .

β) Το εμβαδό των τριγώνων $KB\Delta$ και $\Lambda\Gamma E$.

γ) Τα τμήματα KM και $M\Lambda$.

δ) Το εμβαδό του μη κυρτού τετράπλευρου $AKM\Lambda$.

9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$. Αν είναι $\beta = \sqrt{19}$ cm, $\gamma = 7$ cm, $A\Delta = 5$ cm και $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 60^\circ$, να υπολογιστεί:

- α) Η πλευρά a .
- β) Το εμβαδό του τριγώνου $A\Delta\Gamma$.
- γ) Το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.
- δ) Το μήκος και το εμβαδό του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Delta$.

10. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 10$, $(AB\Gamma) = 40$ και το ύψος του $A\Delta$. Αν E είναι σημείο της πλευράς AB τέτοιο ώστε $AE = \frac{2}{5} AB$ και $EZ \parallel B\Gamma$, όπου Z σημείο της $A\Gamma$, τότε να υπολογίσετε:

- α) Το εμβαδό του τριγώνου AEZ .
- β) Το εμβαδό του τετράπλευρου $AEDZ$.

11. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $AB = A\Delta$.

- α) Να δείξετε ότι $A\Gamma^2 + B\Delta^2 = 3AB^2 + \Gamma\Delta^2$
- β) Αν είναι $AB = 8$ και $\Gamma\Delta = 14$, να υπολογίσετε την πλευρά $B\Gamma$.

12. Δίνεται κύκλος (O, R) και μια διάμετρος του AB . Στην ακτίνα OB παίρνουμε σημείο Γ , τέτοιο ώστε να είναι $\Gamma B = \frac{3}{4} R$. Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΔE , όπου Δ, E είναι σημεία του κύκλου, είναι κάθετο στην AB στο σημείο Γ .

- α) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΔA και ΔB .

- β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = \frac{R\sqrt{15}}{4}$.

13. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και $B\Delta$ η διχοτόμος του. Αν E είναι η προβολή του σημείου Δ πάνω στην $B\Gamma$ τότε:

- α) Να δείξετε ότι $B\Delta^2 = \Delta E^2 + AB^2$
- β) Αν είναι $B\Delta = 5$ και $A\Delta = 3$, να υπολογίσετε το τμήμα EB .

14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, $B\Gamma = 6$ και το ύψος του $A\Delta = 4$. Προεκτείνουμε τη πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma E = \frac{B\Gamma}{2}$.

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

- β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΕ.
- γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΒΖ του τριγώνου ΑΒΓ.
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΖ.

15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε της ΒΓ, τέτοια ώστε ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ. Προεκτείνουμε τα τμήματα ΑΔ και ΑΕ κατά τμήματα ΔΖ=ΑΔ και ΕΗ=ΑΕ αντίστοιχα.

- α) Να δείξετε ότι $(ΔΕΗΖ)=3(ΑΔΕ)$
- β) Να δείξετε ότι $(ΑΒΓ)=3(ΑΔΕ)$
- γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του πενταγώνου ΑΒΖΗΓ σαν συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

16. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $ΓΔ = \frac{α}{2}$.

- α) Να δείξετε ότι $ΑΔ = \frac{α\sqrt{7}}{2}$
- β) Αν Μ είναι το μέσο της ΑΔ, να δείξετε ότι $ΓΜ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$
- γ) Αν ΒΕ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι $ΑΕ=2ΓΜ$.

17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΔ. Αν Ζ είναι σημείο της ΑΓ τέτοιο ώστε $ΓΖ = \frac{1}{3}ΑΓ$ και προεκτείνουμε την ΔΖ κατά τμήμα ΖΕ=ΔΖ, τότε:

- α) Να δείξετε ότι $(ΔΕΓ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ)$
- β) Να δείξετε ότι $(ΑΖΕ) = \frac{2}{3}(ΑΒΓ)$
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τετράπλευρου ΑΒΓΕ σαν συνάρτηση των πλευρών του ΑΒΓ.

18. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ // ΓΔ$, $ΑΒ=α$, $ΓΔ=3α$, $ΑΔ=ΒΓ=2α$ και το ύψος του ΑΕ. Ο κύκλος (Α, α) τέμνει το ΑΕ στο Ζ και την ΑΔ στο Η.

- α) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΕ.
- β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΔ είναι διπλάσιο του εμβαδού ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α.
- γ) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των κυκλικών τομέων ΑΗΖ και ΑΗΒ.
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου τετράπλευρου ΒΖΕΓ.

19. Δύο κύκλοι $(O, 2\rho)$ και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M . Η κοινή εξωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων και η διάκεντρος τους τέμνονται στο A . Αν Γ, B είναι τα σημεία επαφής στους $(O, 2\rho)$ και (K, ρ) αντίστοιχα, να υπολογιστούν σαν συνάρτηση του ρ

- α) το τμήμα AK
- β) τα τμήματα AB και $B\Gamma$
- γ) οι δυνάμεις του A ως προς του δύο κύκλους και
- δ) το εμβαδό του τετράπλευρου $OKB\Gamma$.

20. Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο Γ του επιπέδου τέτοιο ώστε $\Delta_{(O,R)}^{\Gamma} = 3R^2$.

- α) Να βρεθεί η θέση του σημείου Γ στο επίπεδο.
- β) Αν η $\Gamma\Delta$ είναι εφαπτομένη του κύκλου, τότε:
 - i. Να υπολογιστεί το μήκος του $\Gamma\Delta$ σαν συνάρτηση του R
 - ii. Αν η ΓO τέμνει τον κύκλο στα σημεία A, B με $A\Gamma < B\Gamma$, να υπολογιστούν τα τμήματα $A\Delta$ και $B\Delta$ σαν συνάρτηση του R .
 - iii. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma\Delta$.

21. Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά τμήματα $AB=a$ και $B\Gamma=2a$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ABK και τετράγωνο $B\Gamma\Lambda M$. Να υπολογιστούν:

- α) το εμβαδό του τετράπλευρου $A\Gamma\Lambda M$
- β) το τμήμα MK
- γ) το εμβαδό του τριγώνου BMK
- δ) το εμβαδό του τριγώνου MKA

22. Δίνεται ημικύκλιο (O, R) και η διάμετρος του KL . Στην KL παίρνουμε τα σημεία A, B τέτοια ώστε $OA=OB=a$ με $a < R$. Αν Γ είναι σημείο του ημικυκλίου τέτοιο ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισόπλευρο τότε:

- α) Να υπολογίσετε το a σαν συνάρτηση του R .
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου σχήματος $AK\Gamma$.